

Заочна вступна олімпіада «Мудрамакітра-2021»

4 курс

1. Тарас із Максимом мають мішок, у якому лежать 10 кульок: одна біла й 9 чорних. Вони по черзі дістають по кульці, сподіваючись знайти білу, починає Тарас. Якщо гравець знаходить чорну кульку, то він засмучується та викидає її, передаючи хід іншому гравцю. Яка ймовірність того, що біла кулька дістанеться Тарасу?
2. Дано многочлен $Q(x)$ з цілими коефіцієнтами. Для деяких цілих x він набуває значень 1, 2 і 3. Доведіть, що існує щонайбільше одне ціле x , для якого $Q(x)$ дорівнює 5.
3. Дійсне число $x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots$ назовемо повторюваним, якщо його десятковий запис містить як загодно довгі однакові блоки, тобто для кожного k існують такі різні натуральні m і n , що $x_m = x_n, x_{m+1} = x_{n+1}, \dots, x_{m+k} = x_{n+k}$. Доведіть, що квадрат повторюваного числа є повторюваним.
4. Дано три нескінченні послідовності натуральних чисел

$$X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$$

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$$

$$Z_1, Z_2, \dots, Z_n, \dots$$

Доведіть, що знайдуться такі індекси p та q , що $X_p \geq X_q, Y_p \geq Y_q, Z_p \geq Z_q$.

5. Знайдіть усі такі функції $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, що

$$x^2 y^2 (f(x+y) - f(x) - f(y)) = 3(x+y)f(x)f(y)$$

для всіх дійсних x, y .

Правила оформлення конкурсних робіт

Конкурсну роботу потрібно надіслати за адресою mudramakitra@ukr.net, тема листа — «Заочна олімпіада Мудрамакітра-2021».

Обов'язкове виконання наступних умов:

- Роботу треба оформити у текстовому редакторі «Microsoft Word» 12 шрифтом Times New Roman (одним файлом) або у системі розмітки L^AT_EX.
- Розв'язання кожної задачі починати з нового аркушу.
- Назва вкладеного документу з розв'язаннями — Ваше прізвище, ім'я, школа та курс, за який ви написали олімпіаду (наприклад: Шевченко Петро, школа №1, 3 курс). Нічого іншого в назві вкладеного файлу бути не повинно!
- Перед розв'язанням кожної задачі мають бути записані її номер та умова.
- Розв'язання потрібно писати *зрозуміло, чітко, детально*. Всі позначення, які зустрічаються на кресленнях, повинні бути поясненими (введеними) в тексті розв'язання.
- Усі твердження, які використовуються в розв'язанні, *мають бути обґрунтованими*. Правильна відповідь без пояснення, як вона була одержана, оцінюється значно нижче, ніж повний розв'язок!

Роботу потрібно надіслати до 25 травня 2021 року включно.