

Заочна вступна олімпіада «Мудрамакітра-2021»

3 курс

1. Доведіть, що для довільного $n \in \mathbb{N}$ число $n^5 - 1$ не є степенем двійки.
2. Нехай $a, b, c > 0$ та $a + b + c = 3$. Доведіть, що

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3 + 3abc}{abc} \geq \frac{3-a}{b} + \frac{3-b}{c} + \frac{3-c}{a} \geq 6$$

3. Знайдіть усі розв'язки системи

$$\begin{cases} z^3 = x^3 + 3xyz + y^3 \\ z^2 = xy + yz + xz \end{cases}$$

4. Кола ω_1 і ω_2 дотикаються зовнішнім чином у точці A . Дотична до ω_1 в точці B перетинає ω_2 в точках C і D . Прямі BA і BF перетинають ω_2 вдруге у точках E і H відповідно, F — середина дуги CD , яка не містить точку E . Доведіть, що прямі EH , FA і BD перетинаються в одній точці.

5. Є нескінченна дошка в клітинку. На початку n клітинок пофарбовані в чорний колір. Кожну хвилину клітинка фарбується в той колір, якого більше серед трьох клітинок: її самої, сусіда праворуч та сусіда вгорі.

- Доведіть, що рано чи пізно всі чорні клітинки зникнуть.
- Для довільного $n \in \mathbb{N}$ наведіть приклад набору з $2n + 1$ чорної клітини, для якого перші n хвилин кількість чорних клітин буде залишатись незмінною.
- Наведіть приклад набору з чорних клітин, для якого в деякий момент часу чорних клітин буде на 100 більше, ніж було на початку.
- Доведіть, що для довільного набору з n чорних клітин, щонайбільше за n хвилин усі клітини на площині стануть білими.

Правила оформлення конкурсних робіт.

Конкурсну роботу потрібно надіслати за адресою mudramakitra@ukr.net, тема листа — «Заочна олімпіада Мудрамакітра-2021».

Обов'язкове виконання наступних умов:

- Роботу треба оформити у текстовому редакторі «Microsoft Word» 12 шрифтом Times New Roman (одним файлом) або у системі розмітки L^AT_EX.
- Розв'язання кожної задачі починати з нового аркушу.
- Назва вкладеного документу з розв'язаннями — Ваше прізвище, ім'я, школа та курс, за який ви написали олімпіаду (наприклад: Шевченко Петро, школа №1, 3 курс). Нічого іншого в назві вкладеного файлу бути не повинно!
- Перед розв'язанням кожної задачі мають бути записані її номер та умова.
- Розв'язання потрібно писати *зрозуміло, чітко, детально*. Всі позначення, які зустрічаються на кресленнях, повинні бути поясненими (введеними) в тексті розв'язання.
- Усі твердження, які використовуються в розв'язанні, *мають бути обґрунтованими*. Правильна відповідь без пояснення, як вона була одержана, оцінюється значно нижче, ніж повний розв'язок!

Роботу потрібно надіслати до 25 травня 2021 року включно.