

Заочна олімпіада Мудрамакітра - 2020

4 курс

1. Скількома способами можна представити число 2031 у вигляді суми цілих невід'ємних степенів двійки, якщо кожен степінь можна використовувати не більше двох разів.

2. Відомо, що многочлен з додатними коефіцієнтами $x^3 + ax^2 + bx + c$ має три цілих кореня (враховуючи кратність). Яке найменше значення може приймати

a) коефіцієнт c ?

b) коефіцієнт b ?

3. Розв'язати в цілих невід'ємних числах рівняння

$$5^m - 5^n = 20^k$$

4. Знайдіть всі функції $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такі, що для довільних дійсних x, y :

$$f(xf(y) + x) = xy + f(x)$$

5. Дано гострокутний трикутник ABC . Коло, побудоване на BC , як на діаметрі, перетинає сторони AB та AC в точках E та F відповідно. Нехай M — середина BC , а P — перетин прямих AM і EF . Нехай також X — довільна точка на меншій дузі EF , а другий перетин XP з колом — це Y . Доведіть, що $\angle XAY = \angle XYM$.

Правила оформлення конкурсних робіт.

Конкурсну роботу потрібно надіслати за адресою mudramakitra@ukr.net. Обов'язкове виконання наступних умов:

- роботу треба оформити у текстовому редакторі "Microsoft Word" 12 шрифтом Times New Roman (одним файлом) або у системі розмітки ЛАТЕХ (шаблон тексту олімпіади з математики за кожний курс можна скачати зі сторінки заочної олімпіади);

- розв'язання кожної задачі починати з нового аркушу;

- назва листа — "Заочна олімпіада Мудрамакітра-2020";

- назва вкладеного документу з розв'язаннями — Ваше прізвище, ім'я, школа та курс, за який ви написали олімпіаду (наприклад: Петренко Петро, школа №1, 3 курс). Нічого іншого в назві вкладеного файлу бути не повинно!

- Перед розв'язанням кожної задачі мають бути записані її номер та умова.

- Розв'язання потрібно писати *зрозуміло, чітко, детально*. Всі позначення, які зустрічаються на кресленнях, повинні бути поясненими (введеними) в тексті розв'язання.

- Усі твердження, які використовуються в розв'язанні, *мають бути обґрунтованими*. Навіть правильна відповідь без пояснення, як вона була одержана, оцінюється набагато нижче!

Надсилати до 15 травня.