

# Заочна олімпіада Мудрамакітра - 2020

## 3 курс

1. Відомо, що відрізок  $[0, 2]$  знаходиться між коренів квадратного тричлену

$$f(x) = -x^2 + ax + b$$

Доведіть, що рівняння  $x^2 + (a + 2)x + a - b + 2 = 0$  має два дійсних корені.

2. Для деякого числа  $x$  відомо, що  $[x] \cdot \{x\} = 10$ . Які значення може приймати вираз  $[x]^2 - x[x]$ ?

3. Чи існують два натуральних числа  $a, b$ , які не є квадратами, такі, що число  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$  — раціональне?

4. Є смужка  $1 \times 101$ . Двоє ходять по черзі. За хід можна поставити плюс або мінус в ще не заповнену клітину. Той, хто поставив знак поруч з протилежним, програє. Якщо цього не сталося, а вся смужка вже заповнена, то виграє другий. Доведіть, що другий може забезпечити собі перемогу.

5. Три кола з центрами  $O_1, O_2$  та  $O_3$  попарно дотикаються зовнішнім чином в точках  $P, Q, R$ . Точки  $X$  та  $Y$  — перетини прямих  $PQ$  та  $PR$  з третім колом. Доведіть, що вписане коло трикутника  $\triangle O_1O_2O_3$  проходить через ортоцентр трикутника  $\triangle PXY$ .

## Правила оформлення конкурсних робіт.

Конкурсну роботу потрібно надіслати за адресою [mudramakitra@ukr.net](mailto:mudramakitra@ukr.net). Обов'язкове виконання наступних умов:

- роботу треба оформити у текстовому редакторі "Microsoft Word" 12 шрифтом Times New Roman (одним файлом) або у системі розмітки L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X (шаблон тексту олімпіади з математики за кожний курс можна скачати зі сторінки заочної олімпіади);

- розв'язання кожної задачі починати з нового аркушу;
- назва листа — "Заочна олімпіада Мудрамакітра-2020";
- назва вкладеного документу з розв'язаннями — Ваше прізвище, ім'я, школа та курс, за який ви написали олімпіаду (наприклад: Петренко Петро, школа №1, 3 курс). Нічого іншого в назві вкладеного файлу бути не повинно!

- Перед розв'язанням кожної задачі мають бути записані її номер та умова.
- Розв'язання потрібно писати *зрозуміло, чітко, детально*. Всі позначення, які зустрічаються на кресленнях, повинні бути поясненими (введеними) в тексті розв'язання.

- Усі твердження, які використовуються в розв'язанні, *мають бути обґрунтованими*. Навіть правильна відповідь без пояснення, як вона була одержана, оцінюється набагато нижче!

**Надсилати до 15 травня.**